



教育图书



功能学具



学生之家

基础教育行业专研品牌

经浙江省中小学教辅材料
评议委员会评议通过

全品智能作业

学·练·考

主编 肖德好

学习册

本册 主编 徐国平

高中数学

选择性必修第二册 RJA 浙江省

长江出版传媒
崇文书局

CONTENTS



第四章 数列 001

4.1 数列的概念 001

第 1 课时 数列的概念与表示 001

第 2 课时 数列的递推公式与前 n 项和 003

4.2 等差数列 005

4.2.1 等差数列的概念 005

第 1 课时 等差数列的概念与通项公式 005

第 2 课时 等差数列的性质及实际应用 007

4.2.2 等差数列的前 n 项和公式 009

第 1 课时 等差数列的前 n 项和公式 009

第 2 课时 等差数列的前 n 项和的性质及实际

应用 011

4.3 等比数列 012

4.3.1 等比数列的概念 012

第 1 课时 等比数列的概念与通项公式 012

第 2 课时 等比数列的性质及实际应用 014

第 3 课时 等比数列与等差数列的综合

应用 016

4.3.2 等比数列的前 n 项和公式 017

第 1 课时 等比数列的前 n 项和公式 017

第 2 课时 等比数列的前 n 项和的性质及实际

应用 019

专题课（一） 求数列的通项公式的常用

方法 020

专题课（二） 分组求和、倒序相加求和、并

项求和 021

专题课（三） 裂项相消求和、错位相减

求和 022

4.4* 数学归纳法 023

本章总结提升 025

第五章 一元函数的导数及其应用 028

5.1 导数的概念及其意义 028

5.1.1 变化率问题 028

5.1.2 导数的概念及其几何意义 029

第 1 课时 导数的概念 029

第 2 课时 导数的几何意义 031

5.2 导数的运算 033

5.2.1 基本初等函数的导数 033

5.2.2 导数的四则运算法则 034

5.2.3 简单复合函数的导数 036

5.3 导数在研究函数中的应用 037

5.3.1 函数的单调性 037

第1课时 函数的单调性与导数 037

第2课时 利用导数解决函数单调性综合
问题 039

5.3.2 函数的极值与最大(小)值 040

第1课时 函数的极值与导数 040

第2课时 函数的最大(小)值与导数 042

第3课时 含参函数的最大(小)值问题 044

第4课时 导数与函数的零点及实际应用 045

专题课(四) 三次函数的图象与性质及
应用 047

专题课(五) 常用不等式 048

● 本章总结提升 050

■ 参考答案 053

第四章 数列

4.1 数列的概念

第1课时 数列的概念与表示

- 学习目标**
1. 了解数列的概念,知道什么是数列,能说出数列的项.
 2. 了解数列的表示方法,会用表格、图象、通项公式表示数列,能用通项公式求任意项或根据数列的前几项写出数列的一个通项公式.
 3. 了解数列与函数的关系,能用函数的观点看待数列,并能说出数列与函数的共性与差异.

◆ 要点一 数列的概念与分类

1. 数列的概念

按照确定的_____排列的一列数称为数列.

2. 数列的项

(1)数列中的_____叫作这个数列的项.数列的第一个位置上的数叫作这个数列的第1项,常用符号_____表示,第二个位置上的数叫作这个数列的第2项,用_____表示……第 n 个位置上的数叫作这个数列的第 n 项,用_____表示.其中第1项也叫作_____.

(2)数列的一般形式是 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$,简记为_____.

3. 数列的分类

分类标准	名称	含义
按项的个数分类	有穷数列	项数_____的数列
	无穷数列	项数_____的数列
按项的变化趋势分类	递增数列	从第2项起,每一项都_____它的前一项的数列
	递减数列	从第2项起,每一项都_____它的前一项的数列
	常数列	各项都_____的数列

D 典例应用

例1 (1)下列说法正确的是 ()

- A. 数列4,7,3,4的首项是4
B. 在数列 $\{a_n\}$ 中,若 $a_1=3$,则从第2项起,各项均不等于3

C. 数列3,6,8可以表示为 $\{3,6,8\}$

D. $a, -3, -1, 1, b, 5, 7, 9, 11$ 一定能构成数列

(2)已知下列数列:①1,0.84,0.84²,0.84³;②2,4,6,8,10, $\dots, 2n, \dots$;③7,7,7,7, $\dots$;④ $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots$;⑤1,2,3,4,5,6,7,8,9,10;
⑥0,-1,2,-3,4,-5, $\dots$.

其中,有穷数列是_____,无穷数列是_____,递增数列是_____,递减数列是_____,常数列是_____.(填序号)

◆ 要点二 数列的表示

1. 通项公式:如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与它的序号_____之间的对应关系可以用一个式子来表示,那么这个式子叫作这个数列的_____.

注意:有些数列的通项公式不唯一.

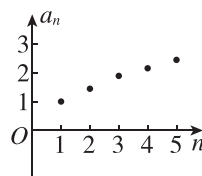
2. 通项公式就是数列的函数解析式,以前我们学过的函数的自变量通常是连续变化的,而数列是自变量为离散的数(正整数)的函数.

3. 数列的其他表示法

(1)表格表示,如下表.

n	1	2	3	$\dots$
a_n	a_1	a_2	a_3	$\dots$

(3)图象表示,如图.



【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)有些数列没有通项公式. ()

(2)若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$,则数列 $\{a_n\}$ 的图象与函数 $y=2x-1$ 的图象相同.

()

D 典例应用

角度 1 已知通项公式写数列的项

例 2 根据数列 $\{a_n\}$ 的通项公式,写出数列的前 5 项,并用图象表示出来.

(1) $a_n = \frac{1}{2}n - 1$;

(2) $a_n = \sin \frac{(n+2)\pi}{2}$.

角度 2 已知数列的项写通项公式

例 3 写出下列数列的一个通项公式.

(1) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots$;

(2) $\frac{1}{1 \times 2}, -\frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{3 \times 4}, -\frac{1}{4 \times 5}, \dots$;

(3) $0, 1, 0, 1, \dots$;

(4) $9, 99, 999, 9999, \dots$.

变式 若将例 3(4)改为 $8, 88, 888, \dots$, 请写出该数列的一个通项公式;若改为 $0.8, 0.88, 0.888, \dots$ 呢?

[素养小结]

根据数列的前几项求数列通项公式的解题思路

(1)先统一项的结构,如都化成分数、根式等形式.

(2)分析结构中变化的部分与不变的部分,探索变化部分的规律与对应序号间的函数解析式.

(3)对于正负交替出现的情况,可先观察其绝对值,再用 $(-1)^n$ 或 $(-1)^{n+1}$ 处理符号.

(4)数列 a, aa (表示个数与十位上的数字都是 $a, a=1, 2, \dots, 9$,下同), $aaa, \dots$ 的一个通项公式为 $a_n = \frac{a}{9}(10^n - 1)$.

(5)对于周期数列,可考虑拆成几个简单数列之和的形式,或者利用周期函数写出通项公式.

角度3 数列通项公式的简单应用

例4 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n^2 - 28n$.

(1)写出数列 $\{a_n\}$ 的第4项和第6项.

(2)-49和68是否为该数列的项?

(2)判断 $\{a_n\}$ 是递增数列还是递减数列,并说明理由.

变式 (1)已知 $a_n = \frac{n - \sqrt{79}}{n - \sqrt{80}}$ ($n \in \mathbf{N}^*$),则数列

$\{a_n\}$ 前50项中的最小项和最大项分别是()

- A. a_1, a_{50} B. a_1, a_8
C. a_8, a_9 D. a_9, a_{50}

(2)数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = -2n^2 + \lambda n$ ($n \in \mathbf{N}^*, \lambda \in \mathbf{R}$),若 $\{a_n\}$ 是递减数列,则 λ 的取值范围是()

- A. $(-\infty, 4)$ B. $(-\infty, 4]$
C. $(-\infty, 6)$ D. $(-\infty, 6]$

[素养小结]

(1)判断数列单调性的方法:

①定义法;②函数法.

(2)求数列最值的方法:

①函数的单调性法:令 $a_n = f(n)$, $n \in \mathbf{N}^*$,通过研究函数 $f(n)$ 的单调性来研究数列 $\{a_n\}$ 的最大(小)项.

②不等式组法:先假设数列有最大(小)项,不妨设 a_n

最大,则满足 $\begin{cases} a_n \geq a_{n-1}, \\ a_n \geq a_{n+1} \end{cases}$ ($n \geq 2$),解不等式组便可得到

n 的取值范围,从而确定 n 的值;不妨设 a_m 最小,则满

足 $\begin{cases} a_m \leq a_{m-1}, \\ a_m \leq a_{m+1} \end{cases}$ ($m \geq 2$),解不等式组便可得到 m 的取

值范围,从而确定 m 的值.

◆ 要点三 数列中项的单调性及最值

D 典例应用

例5 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(1)求证: $0 < a_n < 1$;

第2课时 数列的递推公式与前 n 项和

- 学习目标**
1. 会用递推公式表示数列,能根据数列的递推公式写出数列的前几项.
 2. 了解数列的前 n 项和,并能利用 S_n 与 a_n 的关系解决一些简单问题.

◆ 要点一 数列的递推公式

概念:如果一个数列的相邻两项或多项之间的关系可以用一个式子来表示,那么这个式子叫

作这个数列的_____.

作用:知道了首项或前几项,以及递推公式,就能求出数列的每一项.

D 典例应用

角度 1 由递推公式写出数列的项

例 1 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2a_n}{2+a_n}$, 写出它的前 5 项, 并归纳出数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式.

角度 2 递推公式与数列周期性

例 2 (1) [2026 · 福建龙岩一中高二期中] 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 6, a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n}$, 则 $a_{985} =$ ()

- A. $-\frac{7}{5}$ B. $-\frac{1}{6}$
C. $\frac{5}{7}$ D. 6

(2) [2026 · 河南南阳高二月考] 已知数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1 = 4, c_n \cdot c_{n+1} = 2c_{n+1} - 4$, 则 $c_{2026} =$ ()

- A. -2 B. 2
C. -4 D. 4

角度 3 由递推公式求数列的通项公式

例 3 (1) 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n$, 则 $a_{10} =$ _____.

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, 则 $a_{15} =$ _____.

[素养小结]

(1) 某些用递推公式给出的数列, 写出数列的前几项后, 由前几项分析其特点、规律, 即可归纳总结出数列的一个通项公式.

(2) 递推公式反映的是相邻两项(或多项)之间的关系. 要已知某一项(或某几项), 才可依次求得其他的项. 若序号很大, 则应考虑数列是否具有规律性(周期性).

(3) 具有形如 $a_{n+1} - a_n = f(n)$ 或 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n), n \in \mathbb{N}^*$ 的递推关系的数列, 可以利用累加法或累乘法求出通项公式.

◆ 要点二 数列的前 n 项和

1. 概念及表示

我们把数列 $\{a_n\}$ 从第 1 项起到第 n 项止的各项之和, 称为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 记作 S_n , 即 $S_n =$ _____.

2. 数列的前 n 项和公式

如果数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 与它的序号 n 之间的对应关系可以用一个 _____ 来表示, 那么这个 _____ 叫作这个数列的前 n 项和公式.

3. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式与前 n 项和 S_n 的关系
在数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为其前 n 项和, 显然 $S_1 = a_1$, 而 $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} (n \geq 2)$, 于是 $a_n =$
$$\begin{cases} \text{_____, } n=1, \\ \text{_____, } n \geq 2. \end{cases}$$

D 典例应用

例 4 (1) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2^n$, 则 $a_4 + a_5 =$ ()

- A. 48 B. 32
C. 24 D. 8

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$,

则数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和 $S_3 =$ _____.

变式 (1) [2025 · 山东青岛高二质检] 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = n^2 + n$, 则 $a_7 =$ ()

- A. 11 B. 12
C. 13 D. 14

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = an^2$, 若 $S_{10} = 600$, 则 $a_3 - a_5 - a_6 =$ _____.

◆ 要点三 利用数列的前 n 项和公式求通项公式

D 典例应用

例 5 下面给出了数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(1) $S_n = 2n^2 - 3n$;

(2) $S_n = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

变式 (1) [2025 · 重庆巴蜀中学高二期中] 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = -n^2 + 14$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式为 _____.

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3^n - 2$ (n 为正整数), 则此数列的通项公式为 $a_n =$ _____.

[素养小结]

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 求解通项公式时, 一般先根据 $a_1 = S_1$ 求出 a_1 , 再根据 $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$) 计算出当 $n \geq 2$ 时的通项公式, 然后验证 a_1 是否满足上式, 由此决定数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是否需要分段书写.

4.2 等差数列

4.2.1 等差数列的概念

第 1 课时 等差数列的概念与通项公式

- 学习目标**
1. 理解等差数列的概念, 能用文字语言、符号语言、图形语言描述等差数列的概念, 能根据等差数列的定义判断或证明已知数列是否是等差数列.
 2. 理解等差数列的通项公式, 能根据定义归纳出等差数列的通项公式, 会用通项公式解决一些简单问题.

◆ 要点一 等差数列的有关概念与表示

等差数列与公差: 如果一个数列从第 2 项起, 每一项与它的前一项的差都等于同一个常数, 那么这个数列就叫作 _____ 数列, 这个常数叫

作等差数列的 _____, 公差通常用字母 d 表示.

以上定义用符号表示为 _____ (d 为常数, $n \in \mathbb{N}^*$). 等差数列的定义用符号语言表示, 其本质是等差数列的递推公式.

D 典例应用

例 1 判断下列数列是否为等差数列,如果是,指出它的公差.

- (1)在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n=3n+2$;
- (2)在数列 $\{b_n\}$ 中, $b_n=n^2+n$;
- (3)在数列 $\{c_n\}$ 中, $c_n=8$.

变式 (多选题)下列数列中为等差数列的是 ()

- A. 9,9,9,9,9
- B. 4,7,10,13,16
- C. $\ln 3, \ln 9, \ln 27, \ln 81$
- D. $2^5, 2^4, 2^3, 2^2$

◆ 要点二 等差中项

等差中项:由三个数 a, A, b 组成的等差数列可以看成是最简单的等差数列,这时, A 叫作 a 与 b 的_____,并且 $2A=a+b$.

D 典例应用

例 2 (1)若 $a=\frac{1}{\sqrt{2}+1}, b=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$,则 a, b 的等差中项为 ()

- A. $\sqrt{3}$
- B. $\sqrt{2}$
- C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2)已知 $2m$ 和 n 的等差中项是5, m 和 $2n$ 的等差中项是4,则 m 和 n 的等差中项是_____.

◆ 要点三 等差数列的通项公式及应用

1. 通项公式:若等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ,公差为 d ,则其通项公式为 $a_n=_____$.

2. 等差数列的图象:等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可写成 $a_n=dn+(a_1-d)$.点 (n, a_n) 分布在一条以 d 为斜率的直线上,是这条直线上一列_____.

3. 等差数列的单调性:在等差数列 $\{a_n\}$ 中,若公差 $d>0$,则数列 $\{a_n\}$ 为_____数列;若公差 $d<0$,则数列 $\{a_n\}$ 为_____数列.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=kn+b$ (k, b 为常数),则数列 $\{a_n\}$ 一定是等差数列. ()

(2)若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\begin{cases} 1, & n=1, \\ n+1, & n\geq 2, \end{cases}$ 则 $\{a_n\}$ 是等差数列. ()

(3)各项都为正数的等差数列的公差一定大于0. ()

D 典例应用

角度 1 等差数列的基本量运算

例 3 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

- (1)若 $a_1=2, d=3$,求 a_{10} ;
- (2)若 $a_1=3, a_n=21, d=2$,求 n ;
- (3)若 $a_1=12, a_6=27$,求 d ;
- (4)若 $d=-\frac{1}{3}, a_7=8$,求 a_1 和 a_n .

角度2 等差数列的函数特征

例4 (多选题) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d>0$, 则下列说法中正确的是 ()

- A. 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列
- B. 数列 $\{na_n\}$ 是递增数列
- C. 数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是递减数列
- D. 数列 $\{a_n+3nd\}$ 是递增数列

变式 写出一个同时满足①②③的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式: $a_n =$ _____.

- ①数列 $\{a_n\}$ 是无穷等差数列;
- ②数列 $\{a_n\}$ 为递减数列;
- ③数列 $\{|a_n|\}$ 的第5项为最小项.

◆ 要点四 等差数列的判定与证明

D 典例应用

例5 [2026·浙江绍兴高二期中] 已知数列

$\{a_n\}$ 满足 $a_1=2, a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n} (n \in \mathbf{N}^*)$, 令

$$b_n = \frac{1}{a_n - 1}.$$

(1) 求 a_2, a_3 的值;

(2) 证明数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 并求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

[素养小结]

判定等差数列常用的两种方法

(1) 定义法: $a_{n+1} - a_n = d$ (d 为常数, $n \in \mathbf{N}^*$) $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 为等差数列.

(2) 等差中项法: $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 为等差数列.

第2课时 等差数列的性质及实际应用

- 学习目标**
1. 理解等差数列的通项公式, 能说出等差数列通项公式的特征, 并能灵活求解等差数列的基本量.
 2. 能得出等差数列的一些性质, 并利用其解决一些简单问题.

◆ 要点一 等差数列的性质

1. 等差数列通项公式的变形与推广

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则

$$(1) a_n = dn + (a_1 - d) (n \in \mathbf{N}^*);$$

$$(2) a_n = a_m + \quad (m, n \in \mathbf{N}^*);$$

$$(3) d = \frac{a_n - a_m}{n - m} (m, n \in \mathbf{N}^*, \text{且 } m \neq n).$$

2. 等差数列与下标有关的性质

在等差数列 $\{a_n\}$ 中,

①若 $m+n=p+q$ ($m, n, p, q \in \mathbf{N}^*$), 则 $a_m + a_n =$ _____.

②若 $m+n=2k$ ($m, n, k \in \mathbf{N}^*$), 则 $a_m + a_n =$ _____.

③在有穷等差数列 $\{a_n\}$ 中, 与首末两项等距离的两项之和都相等, 即 $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \cdots$.

④若 $a_{x_1} + a_{x_2} + a_{x_3} + \cdots + a_{x_n} = a_{y_1} + a_{y_2} + a_{y_3} + \cdots + a_{y_n}$, 则 $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n$.

D 典例应用

例 1 (1) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_3 + a_9 = 12$, $a_2 = 4$, 则 $a_{10} =$ ()

- A. 4 B. 8
C. 3 D. 6

(2) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_3 + a_6 + a_{20} + a_{23} = 36$, 则 $a_{13} =$ _____.

变式 (1) [2026 · 浙江杭州高二期末] 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_{10} = 13$, $a_2 + a_5 + a_9 + a_{16} = 28$, 则 $\{a_n\}$ 的公差 d 为 ()

- A. 3 B. 4
C. 5 D. 6

(2) [2026 · 山东泰安高二期中] 已知各项都为正数的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 a_4 + a_2 a_6 + a_4 a_9 + a_6 a_8 = 25$, 则 $a_5 =$ _____.

[素养小结]

等差数列运算的两种常用思路

(1) 基本量法: 根据已知条件, 列出关于 a_1, d 的方程(组), 确定 a_1, d , 然后求其他量.

(2) 巧用性质法: 观察等差数列中项的序号, 若满足 $m+n=p+q=2r$ ($m, n, p, q, r \in \mathbf{N}^*$), 则 $a_m + a_n = a_p + a_q = 2a_r$.

◆ 要点二 由等差数列构造新数列

1. 若 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 分别是公差为 d_1, d_2 的等差数列, 则

(1) 数列 $\{c + a_n\}$ (c 为任意常数) 是公差为 _____ 的等差数列;

(2) 数列 $\{c \cdot a_n\}$ (c 为任意常数) 是公差为 _____ 的等差数列;

(3) 数列 $\{pa_n + qb_n\}$ (p, q 是任意常数) 是公差为 _____ 的等差数列.

2. 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则 $a_m, a_{m+k}, a_{m+2k}, a_{m+3k}, \dots$ ($m, k \in \mathbf{N}^*$) 仍为等差数列.

D 典例应用

例 2 (1) 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是等差数列, 且 $a_1 = 25, b_1 = 75, a_2 + b_2 = 100$, 那么数列 $\{a_n + b_n\}$ 的第 37 项为 _____.

(2) 已知等差数列 $-2, 1, 4, 7, 10, \dots$, 现在其每相邻两项之间插入一个数, 使之成为一个新的等差数列 $\{a_n\}$. 求新数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

变式 在无穷等差数列 $\{a_n\}$ 中, 首项 $a_1 = 3$, 公差 $d = -5$, 依次取出序号能被 4 除余 3 的项组成数列 $\{b_n\}$.

(1) 求 b_1 和 b_2 .

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(3) 数列 $\{b_n\}$ 中的第 506 项是 $\{a_n\}$ 中的第几项?

[素养小结]

对于任何形式的构造数列, 判断其是否为等差数列, 一般从两个方面进行: (1) 定义, 即 $a_n - a_{n-1}$ ($n \geq 2$) 是否为常数; (2) 通项公式是否为关于 n 的一次函数.

◆ 要点三 灵活设元求解等差数列

D 典例应用

例 3 (1) 现有三个数构成等差数列, 这三个数的和为 9, 前两项的积为后一项的 6 倍, 求这三个数.

(2) 已知四个数组成递增的等差数列, 中间两项的和为 2, 首末两项的积为 -8 , 求这四个数.

变式 已知递增的等差数列 $\{a_n\}$ 的前三项的和为 21, 前三项的积为 231, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

[素养小结]

常见设元技巧

(1) 当等差数列 $\{a_n\}$ 的项数 n 为奇数时, 可设中间一项为 a , 再用公差 d 向两边分别设项: $\cdots, a-2d, a-d, a, a+d, a+2d, \cdots$.

(2) 当等差数列 $\{a_n\}$ 的项数 n 为偶数时, 可设中间两项为 $a-d, a+d$, 再以公差 $2d$ 向两边分别设项: $\cdots, a-3d, a-d, a+d, a+3d, \cdots$, 这样可减少计算量.

◆ 要点四 等差数列的实际应用

D 典例应用

例 4 某公司经销一种数码产品, 第 1 年可获利 200 万元. 从第 2 年起, 由于市场竞争等方面的原因, 其利润每年比上一年减少 20 万元, 按照这一规律, 如果公司不开发新产品, 也不调整经营策略, 从哪一年起, 该公司经销这一产品将亏损?

4.2.2 等差数列的前 n 项和公式

第 1 课时 等差数列的前 n 项和公式

- 学习目标**
1. 能说明等差数列前 n 项和公式的特征, 能灵活运用求和公式解决一些简单问题.
 2. 会求等差数列前 n 项和的最值.
 3. 会计算含绝对值的前 n 项和.

◆ 要点一 等差数列的前 n 项和公式

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式

已知量	首项、末项与项数	首项、公差与项数
求和公式	$S_n =$ _____	$S_n =$ _____

[诊断分析] 判断正误. (请在括号中打“√”或“×”)

(1) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式是关于整数 n 的二次函数. ()

(2) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式的常数项为 0. ()

(3) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 S_n 与 a_n 不可能相等. ()

D 典例应用

例 1 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公差为 d .

(1) 若 $S_8=48$, $S_{12}=168$, 求 a_1 和 d ;

(2) 若 $a_6=10$, $S_5=5$, 求 a_8 和 S_8 .

变式 (1) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1=2$, 且 $a_4+a_{19}=0$, 则 $S_{21}=(\quad)$

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

(2) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_2+a_9=8$, $S_5=-5$, 则 S_{15} 的值为 $(\quad)$

- A. 125 B. 135
C. 145 D. 155

◆ 要点二 等差数列的前 n 项和的最值

(1) 利用邻项变号法:

当 $a_1>0, d<0$ 时, S_n 有 _____ 值, 使 S_n 取到最值的 n 可由不等式组 _____ 确定;

当 $a_1<0, d>0$ 时, S_n 有 _____ 值, 使 S_n 取到最值的 n 可由不等式组 _____ 确定.

(2) 利用二次函数的最值:

$S_n = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n, n \in \mathbf{N}^*$, 若 $d \neq 0$, 则从二

次函数的角度看: 当 $d>0$ 时, S_n 有 _____ 值;

当 $d<0$ 时, S_n 有 _____ 值. 当 n 取最接近对称轴的正整数时, S_n 取到最值.

D 典例应用

例 2 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1=25$, $S_{17}=S_9$, 求 S_n 的最大值.

变式 (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_5+a_8<0, S_{11}>0$, 则 S_n 的最大值为 $(\quad)$

- A. S_5 B. S_6
C. S_7 D. S_8

(2) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_6=-600$, 当且仅当 $n=30$ 时 S_n 取得最小值, 则 $\{a_n\}$ 的公差 d 的取值范围为 _____.

[素养小结]

求等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 最值的方法

(1) 寻找数列 $\{a_n\}$ 正、负项的分界点, 可利用等差数列

的性质或利用 $\begin{cases} a_n \geq 0, \\ a_{n+1} \leq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_n \leq 0, \\ a_{n+1} \geq 0 \end{cases}$ 来寻找;

(2) 运用二次函数的性质求最值, 注意 $n \in \mathbf{N}^*$.

◆ 要点三 数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和

D 典例应用

例 3 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_3=98, a_6=86$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和.

变式 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = -20, a_{n+1} = a_n + 4$, 求 $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}|$.

[素养小结]

由等差数列 $\{a_n\}$ 求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和的技巧 (其中 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和)

(1) 若等差数列 $\{a_n\}$ 的各项都为非负数 (或非正数), 则数列 $\{|a_n|\}$ 就是数列 $\{a_n\}$ (或 $\{-a_n\}$), 可以直接求解.

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 k 项为负数, 从第 $k+1$ 项开始以后的项都为非负数, 则数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和 $T_n =$

$$\begin{cases} -S_n, & n \leq k, \\ S_n - 2S_k, & n > k. \end{cases}$$

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 k 项为正数, 从第 $k+1$ 项开始以后的项都为非正数, 则数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和

$$T_n = \begin{cases} S_n, & n \leq k, \\ 2S_k - S_n, & n > k. \end{cases}$$

第2课时 等差数列的前 n 项和的性质及实际应用

- 学习目标**
1. 理解等差数列前 n 项和的性质.
 2. 能在具体的问题情境中发现数列的等差关系, 抽象出等差数列模型, 并应用该模型解决相关问题.

◆ 要点一 等差数列的前 n 项和的性质

1. 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是其前 n 项和, $k \in \mathbb{N}^*$, 那么 $S_k, S_{2k} - S_k, S_{3k} - S_{2k}$ 构成公差为 $k^2 d$ 的等差数列, 如图所示.

$$\begin{array}{c} \overbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}^{S_k} + \overbrace{a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}}^{S_{2k} - S_k} + \overbrace{a_{2k+1} + a_{2k+2} + \cdots + a_{3k}}^{S_{3k} - S_{2k}} \end{array}$$

2. 若 S_n, T_n 分别为等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 则 $\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}} = \frac{a_n}{b_n}, \frac{a_m}{b_n} = \frac{2n-1}{2m-1} \cdot \frac{S_{2m-1}}{T_{2n-1}}$.

3. 若数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, 则数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 也是等差数列, 且公差为 $\frac{d}{2}$.

4. 设数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, $S_{奇}$ 是前 n 项中奇数项的和, $S_{偶}$ 是前 n 项中偶数项的和, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = S_{奇} + S_{偶}$. 当等差数列的项数 n 为奇数时, 中间一项记为 $a_{中}$. 有如下性质:

(1) 当 n 为偶数时, $S_{偶} - S_{奇} = \underline{\hspace{2cm}}, \frac{S_{偶}}{S_{奇}} = \underline{\hspace{2cm}};$

(2) 当 n 为奇数时, $S_{奇} - S_{偶} = \underline{\hspace{2cm}}, S_{奇} = \underline{\hspace{2cm}}, S_{偶} = \underline{\hspace{2cm}}, \frac{S_{奇}}{S_{偶}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

D 典例应用

例1 (1) 已知一个等差数列的前 12 项和为 354, 前 12 项中偶数项之和与奇数项之和的比为 32 : 27, 求该数列的公差 d .

(2) 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $\frac{S_6}{S_3} = 4$, 求 $\frac{S_9}{S_6}$.